



Задание 18

Уравнения, неравенства, системы с параметрами

Функции с параметром

1. Найдите все значения a , при каждом из которых наименьшее значение функции

$$f(x) = 4ax + |x^2 - 6x + 5|$$

больше, чем -24 .

2. Найдите все значения a , при каждом из которых наименьшее значение функции

$$f(x) = 6ax + |x^2 - 6x + 5|$$

больше, чем -24 .

3. Найти все значения a , при каждом из которых функция

$$f(x) = x^2 - 2|x - a^2| - 8x$$

имеет более двух точек экстремума.

4. Найти все значения a , при каждом из которых функция

$$f(x) = x^2 - 2|x - a^2| - 4x$$

имеет хотя бы одну точку максимума.

5. Найдите все значения a , при каждом из которых функция

$$f(x) = x^2 - |x - a^2| - 9x$$

имеет более двух точек экстремума.

6. Найдите все значения a , при каждом из которых график функции

$$f(x) = x^2 - 3x + 2 - |x^2 - 5x + 4| - a$$

пересекает ось абсцисс менее чем в трех различных точках.

7. Найдите все значения a , при каждом из которых график функции

$$f(x) = x^2 - |x^2 + 2x - 3| - a$$

пересекает ось абсцисс более чем в двух различных точках.

Уравнения с параметром

1. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $x^4 + (a - 3)^2 = |x - a + 3| + |x + a - 3|$ либо имеет единственное решение, либо не имеет решений.

2. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$|x^2 - 2ax + 7| = |6a - x^2 - 2x - 1|$$

имеет более двух корней.

3. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$\left(x + \frac{1}{x-a}\right)^2 - (a+9)\left(x + \frac{1}{x-a}\right) + 2a(9-a) = 0.$$

имеет ровно 4 решения.

4. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$|x - a^2 + a + 2| + |x - a^2 + 3a - 1| = 2a - 3$$

имеет корни, но ни один из них не принадлежит интервалу $(4; 19)$.

5. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$|x - a^2 + 4a - 2| + |x - a^2 + 2a + 3| = 2a - 5$$

имеет хотя бы один корень на отрезке $[5; 23]$.

6. Найти все значения параметра a , при каждом из которых среди значений

функции $y = \frac{x^2 - 2x + a}{6 + x^2}$ есть ровно одно целое число.

7. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых множество

значений функции $y = \frac{a + 3x - ax}{x^2 + 2ax + a^2 + 1}$ содержит отрезок $[0; 1]$.

8. Найдите все такие значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$(1 + \sin x)^4 - 4 \sin x = 7 - a - a^2$ не имеет решений.

9. Найдите все такие значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$(4x - x^2)^2 - 32\sqrt{4x - x^2} = a^2 - 14a$ имеет хотя бы одно решение.

10. Найдите все значения параметра a , при которых любое число из отрезка $2 \leq x \leq 3$ является решением уравнения

$$|x - a - 2| + |x + a + 3| = 2a + 5.$$

11. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\left| \frac{5}{x} - 3 \right| = ax - 1$$

на промежутке $(0, +\infty)$ имеет более двух корней.

12. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\left| \frac{5}{x+1} - 3 \right| = ax + a - 2$$

на промежутке $(-1, +\infty)$ имеет больше двух корней.

13. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$ax + \sqrt{3 - 2x - x^2} = 4a + 2$$

имеет единственный корень.

14. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$8a + \sqrt{7 + 6x - x^2} = ax + 4$$

имеет единственный корень.

15. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $\sqrt{2xy + a} = x + y + 5$ не имеет решений.

16. Найдите все значения a , при которых уравнение $\log_{x+1}(a + x - 6) = 2$ имеет хотя бы один корень, принадлежащий промежутку $(-1; 1]$.

17. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $x^2 - 8x = 2|x - a| - 16$ имеет ровно три различных решения.

Неравенства с параметром

1. Найдите все значения a , при каждом из которых решения неравенства $|2x - a| + 1 \leq |x + 3|$ образуют отрезок длины 1.

2. Найдите все значения a , при каждом из которых решения неравенства $|3x - a| + 2 \leq |x - 4|$ образуют отрезок длины 1.

3. Найдите все значения a , при каждом из которых множеством решений неравенства

$$\sqrt{3 - x} + |x - a| \leq 2$$
 является отрезок.

4. Найдите все значения a , при каждом из которых множеством решений неравенства $\sqrt{5-x} + |x+a| \leq 3$ является отрезок.

5. Найдите все значения a , при каждом из которых неравенство

$$\left| \frac{x^2 + ax + 1}{x^2 + x + 1} \right| < 3$$

выполняется при всех x .

6. Найдите все положительные значения a , при каждом из которых множеством решений неравенства $\frac{x-2}{ax^2 - (a^2+1)x + a} \geq 0$ является некоторый луч.

Системы с параметром

1. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |x + 2y + 1| \leq 11, \\ (x - a)^2 + (y - 2a)^2 = 2 + a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

2. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |3x - y + 2| \leq 12, \\ (x - 3a)^2 + (y + a)^2 = 3a + 4 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

3. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} (x-1)(x+2) \leq 0, \\ 8x^2 + 8y^2 - 16a(x-y) + 15a^2 - 48y - 50a + 72 = 0. \end{cases}$$

имеет единственное решение.

4. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 = 5xy, \\ (x-a)^2 + (y-a)^2 = 5a^4. \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

5. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} y(y-7) = xy - 5(x+2), \\ x \leq 6, \\ \frac{a(x-6) - 2}{y-2} = 1. \end{cases}$$

имеет единственное решение.

6. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 = 10xy, \\ (x - a)^2 + (y - a)^2 = 10a^4. \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

7. Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 2x + y^2 - 4y = 2|x + 2y - 5|, \\ 2x - y = a \end{cases}$$

имеет более двух решений.

8. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |3x - y + 2| \leq 12, \\ (x - 3a)^2 + (y + a)^2 = 3a + 4 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

9. Найдите все целочисленные значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} \sqrt{(x - 2)^2 + (y - a)^2} + \sqrt{(x - 5)^2 + (y - a)^2} = 3, \\ x^2 - |a + 2|x - 3a^2 = 5 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

10. Найдите все положительные значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} (|x| - 5)^2 + (y - 4)^2 = 4, \\ (x + 2)^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

11. Найдите все положительные значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} (|x| - 5)^2 + (y - 4)^2 = 4, \\ (x - 2)^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

12. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + 12x + |y| + 27 = 0, \\ x^2 + (y - a)(y + a) = -12(x + 3) \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

13. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} 4|y-3| = 12 - 3|x|, \\ y^2 - a^2 = 3(2y-3) - x^2 \end{cases}$ имеет ровно четыре решения.

14. Найдите все положительные значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (|x| - 9)^2 + (y - 5)^2 = 9, \\ (x + 3)^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

15. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система $\begin{cases} x^2 - 8x + |y| + 12 = 0, \\ x^2 + (y - a)(y + a) = 8(x - 2) \end{cases}$ имеет ровно 8 решений.

16. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 - 2x + |y| - 15 = 0, \\ x^2 + (y - a)(y + a) = 2 \left(x - \frac{1}{2} \right) \end{cases}$$

имеет ровно 6 решений.

17. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2a, \\ 2xy = 2a - 1 \end{cases}$ имеет ровно два решения.

18. Известно, что значение параметра a таково, что система уравнений

$$\begin{cases} 2^{\ln y} = 4^{|x|}, \\ \log_2(x^4 y^2 + 2a^2) = \log_2(1 - ax^2 y^2) + 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение. Найдите это значение параметра a и решите систему при найденном значении параметра.

19. При каких p данная система имеет решения: $\begin{cases} x^2 + px + 2 = 0, \\ \sin^2 \pi p + \sin^2 \pi x + 2^{|y|} = \left| \sin \frac{\pi x}{2} \right|? \end{cases}$